OLIMPIADA DE MATEMATICÃ
ETAPA LOCALÃ
22 februarie 2014

CLASA A V-A

Subiectul I (7p)

a). Aflati numerele naturale a si b astfel incat (a+b)(a-b-1)=2014.
b). Exista a si b numere naturale astfel incat $(a^2+b^2+a+b)^2+(a^2+b^2-a-b)^2=2014$?
Argumentati.

Subiectul II (7p)

a). Sa se scrie $a=10^{2014}$ ca suma de doua patrate perfecte.
b). Sa se scrie $b=6^{2015}$ ca suma de trei cuburi perfecte.

Subiectul III (7p)

Fie M={2014,2015,2016,…2113}.
a). Sa se arate ca oricum am alege 51numere din multimea M , exista doua a caror suma este un numar prim.
b). Sa se arate ca exista doua multimi X si Y disjuncte cu proprietatea ca
$X \cup Y=M$ si suma elementelor multimii X este egala cu suma elementelor multimii Y.
c). Sa se arate ca nu exista doua multimi X si Y disjuncte cu proprietatea ca
$X \cup Y=M$ si produsul elementelor multimii X este egal cu produsul elementelor multimii Y.

Subiectul IV (7p)

Se considera 100 puncte pe un cerc. In fiecare punct se inscrie aleator cate un numar natural de la 1 la 100. Este posibil ca suma oricaror patru numere inscrise in patru puncte consecutive sa fie mai mica decat 203?
(GM. nr.5-2011)

Notă:

- **Toate subiectele sunt obligatorii**
- **Timp de lucru: 2 ore**

Str. Lacului, nr.19, Slobozia, Ialomița
Tel: 0243/231.825; 0372.705.073; Fax: 0243.231.825
E-mail: secretariat@isjialomita.ro

OLIMPIADA DE MATEMATICĂ
ETAPA LOCALĂ
22 februarie 2014

CLASA a VI-a

SUBIECTUL I (7p)

Să se determine numerele naturale nenule a şi b cu proprietăţile: a+b=2014 şi [a,b]=(a,b)·682, unde [a,b] este cel mai mic multiplu comun al numerelor a şi b, iar (a,b) este cel mai mare divizor comun al numerelor a şi b.

SUBIECTUL II (7p)

Numerele naturale a,b,m verifică relaţia 2a + 6b - 5m = 0. Arătaţi că $a^2 + b^2$ se divide cu 5.

G.M. nr. 9/2013

SUBIECTUL III (7p)

Fie A şi B două puncte în plan astfel încât AB=1m, M_1 este mijlocul segmentului [AB], M_2 este mijlocul segmentului $[AM_1]$, M_3 este mijlocul segmentului $[AM_2]$ şi aşa mai departe, M_n este mijlocul segmentului $[AM_{n-1}]$ pentru orice număr natural nenul n.

a) **Calculaţi lungimea segmentului $[M_5M_4]$.**
b) **Determinaţi numărul n cel mai mic pentru care lungimea segmentului $[AM_n]$ să fie mai mică de 1mm.**

SUBIECTUL IV (7p)

Se dau punctele coliniare A, O, B, în această ordine, şi punctele C şi D de o parte şi alta a dreptei AB, astfel încât $m(\widehat{COD}) = 90^0$ şi $m(\widehat{AOC}) = 4m(\widehat{AOD})$. Dacă [OM este bisectoarea unghiului $\widehat{BOC}$ şi [ON este bisectoarea unghiului $\widehat{BOD}$, se cere:

a) **Determinaţi măsura unghiului $\widehat{DOM}$;**
b) **Determinaţi măsura unghiului $\widehat{MON}$.**

Notă:

- **Toate subiectele sunt obligatorii**
- **Timp de lucru: 2 ore**

Str. Lacului, nr.19, Slobozia, Ialomiţa
Tel: 0243/231.825; 0372.705.073; Fax: 0243.231.825
E-mail: secretariat@isjialomita.ro

OLIMPIADA DE MATEMATICÃ
ETAPA LOCALÃ
22 februarie 2014

CLASA a VII-a

Subiectul I

Se consideră numerele reale:

$$x=\sqrt{2}+\sqrt{2^2}+\sqrt{2^3}+....+\sqrt{2^{2014}} \quad \text{si}$$
$$y=2+2^2+2^3+....+2^{2014}$$

a) Să se arate că $x=\left(2+\sqrt{2}\right)\left(2^{1007}-1\right)$

b) Să se arate că numărul $n=2\left(\frac{y}{x}\cdot\frac{\sqrt{2}+1}{\sqrt{2}}-1\right)$ este pătrat perfect.

Subiectul II

Demonstraţi că nu există $x,y,z\in Z$ astfel încât

$$xy\left(x-y\right)+yz\left(y-z\right)+zx\left(z-x\right)=-1$$

Subiectul III

În triunghiul ABC, D este mijlocul segmentului (AC) iar (CE este bisectoarea interioară a unghiului $\sphericalangle BCA$, $E\in\left(AB\right)$. Dacă $BD\cap CE=\left\{P\right\}$, să se arate că

$$\frac{PC}{PE}-2\cdot\frac{PD}{PB}=1$$

Subiectul IV

Se consideră pătratul ABCD în care punctele G şi H sunt mijloacele laturilor DC şi respectiv BC. Dreptele AG şi AH intersectează diagonala BD în punctele E respectiv F.

a) Arătaţi că patrulaterul EFHG este trapez isoscel.

b) Determinaţi raportul dintre aria trapezului EFHG şi aria pătratului ABCD.

Nota: Toate subiectele sunt obligatorii.
Timpul efectiv de lucru este 3 ore.

Str. Lacului, nr.19, Slobozia, Ialomița
Tel: 0243/231.825; 0372.705.073; Fax: 0243.231.825
E-mail: secretariat@isjialomita.ro

OLIMPIADA DE MATEMATICĂ
ETAPA LOCALĂ
22 februarie 2014

CLASA a VIII-a

SUBIECTUL I (7p)

(3p) **a)** Se consideră numărul $A = n^2 - n - 12,\ n \in \boldsymbol{N}$. Să se arate că, dacă A este divizibil cu 7, atunci A este divizibil cu 98.

(4p) **b)** Să se arate că numărul $B = n^2 + 10n - 3$ nu este divizibil cu 196, pentru orice valoare naturală a numărului n.

SUBIECTUL II (7p)

(1p) **a)** Stabiliţi dacă $\frac{1}{\sqrt{2014}} < \frac{2}{\sqrt{2014}+\sqrt{2013}} < \frac{1}{\sqrt{2013}}$.

(3p) **b)** Arătaţi că $\frac{1}{\sqrt{n+1}} < 2\sqrt{n+1} - 2\sqrt{n} < \frac{1}{\sqrt{n}}$, pentru orice valoare naturală nenulă a numărului n.

(3p) **c)** Demonstraţi că $\frac{1}{\sqrt{100}} + \frac{1}{\sqrt{101}} + ... + \frac{1}{\sqrt{120}} > \frac{1}{\sqrt{145}} + \frac{1}{\sqrt{146}} + ... + \frac{1}{\sqrt{169}}$.

SUBIECTUL III (7p)

Se consideră cubul $ABCDA'B'C'D'$. Punctele P, Q şi R sunt proiecţiile punctului A pe dreptele $A'D$, $A'B$ şi respectiv $A'C$.

(4p) **a)** Să se arate că dreapta $A'C$ este perpendiculară pe planul (PQR);

(3p) **b)** Să se calculeze aria triunghiului PQR, pentru $AB = a\ \ cm,\ \ a > 0$.

SUBIECTUL IV (7p)

Fie A, B, C şi D patru puncte necoplanare aşa încât $AB = 6cm,\ AC = AD = 6\sqrt{2}\ \ cm$ şi $m\angle(DAB) = m\angle(BAC) = m\angle(CAD) = 90^0$.

(2p) **a)** Să se calculeze aria triunghiului BCD;

(5p) **b)** Să se afle lungimea segmentului AE, unde E este proiecţia punctului A pe planul (BCD).

Notă:

- **Toate subiectele sunt obligatorii**
- **Timp de lucru: 3 ore**

Str. Lacului, nr.19, Slobozia, Ialomița
Tel: 0243/231.825; 0372.705.073; Fax: 0243.231.825
E-mail: secretariat@isjialomita.ro

OLIMPIADA DE MATEMATICÃ
ETAPA LOCALÃ
22 februarie 2014

Clasa a V-a

Bareme de corectare

Subiectul I

a). Aflati numerele naturale a si b astfel incat (a+b)(a-b-1)=2014.

b). Exista a si b numere naturale astfel incat $(a^2+b^2+a+b)^2+(a^2+b^2-a-b)^2=2014$?

Argumentati.

Barem:

a). $2014=2\cdot 19\cdot 53$, $D_{2014}=\{1,2,19,38,53,106,1007,2014\}$……..2p

a+b>a-b-1, rezulta ca avem urmatoarele patru cazuri:

i). a+b=2014 si a-b-1=1 cu solutia a=1008, b=1006.

ii). a+b=1007 si a-b-1=2 cu solutia a=505,b=502.

iii). a+b=106 si a-b-1=19 cu solutia a=63, b=43.

iv) a+b=53 si a-b-1=38 cu solutia a=46, b=7. ……2p

b). $x=a^2+b^2+a+b=a(a+1)+b(b+1)=2k$, k numar natural
(produsul a doua nr. consecutive este numar par).

$y==a^2+b^2-a-b=a(a-1)+b(b-1)=2p$, p numar natural……2p

Deci $x^2+y^2=(2k)^2+(2p)^2=4k^2+4p^2=M_4$. Dar $2014=M_4+2$, rezulta ca nu exista a si b numere naturale care sa verifice conditiile problemei……..1p

Str. Lacului, nr.19, Slobozia, Ialomița
Tel: 0243/231.825; 0372.705.073; Fax: 0243.231.825
E-mail: secretariat@isjialomita.ro

Subiectul II

a). Sa se scrie $a=10^{2014}$ ca suma de doua patrate perfecte.

b). Sa se scrie $b=6^{2015}$ ca suma de trei cuburi perfecte.

Barem:

a). $10^2=6^2+8^2$……1p

$10^{2014}=10^2\cdot10^{2012}=(6^2+8^2)\cdot(10^{1006})^2=(6\cdot10^{1006})^2+(8\cdot10^{1006})^2$ ……..2p

b). $6^2=1^3+2^3+3^3$…….2p

$6^{2015}=6^2\cdot6^{2013}=(1^3+2^3+3^3)\cdot(6^{671})^3=(1\cdot6^{671})^3+(2\cdot6^{671})^3+(3\cdot6^{671})^3$……..2p

Subiectul III

Fie M={2014,2015,2016,…2113}.

a). Sa se arate ca oricum am alege 51 numere din multimea M , exista doua a caror suma este un numar prim.

b). Sa se arate ca exista doua multimi X si Y disjuncte cu proprietatea ca

$X \cup Y=M$ si suma elementelor multimii X este egala cu suma elementelor multimii Y.

c). Sa se arate ca nu exista doua multimi X si Y disjuncte cu proprietatea ca

$X \cup Y=M$ si produsul elementelor multimii X este egal cu produsul elementelor multimii Y.

Barem:

a). cardM=2113-2014+1=100……..1p

Consideram urmatoarele multimi: $M_1=\{2014,2113\}$, $M_{2=}\{2015,2112\}$, $M_3=\{2016,2111\}$,…$M_{50}=\{2063,2064\}$.

Suma elementelor fiecarei multimi este 4127 ……1p

Str. Lacului, nr.19, Slobozia, Ialomița
Tel: 0243/231.825; 0372.705.073; Fax: 0243.231.825
E-mail: secretariat@isjialomita.ro

Avem 51 numere si 50 multimi, rezulta cu principiul cutiei ca exista doua numere in aceeasi multime deci exista doua numere cu suma 4127 care este nr. prim(se demonstreaza)……1p

b). Consideram $X=M_1 \cup M_2 \cup M_3 \cup \dots M_{25}$ si $Y= M_{26} \cup M_{27} \cup M_{28} \cup \dots M_{50}$

X si Y sunt disjuncte. Suma elementelor multimii X este egala cu suma elementelor multimii Y si este $4127 \cdot 25$. Deci exista multimile cu proprietatea din enunt…….2p

c). Presupunem ca exista doua multimi X si Y cu proprietatea din enunt. Daca produsul elementelor multimii X este egal cu produsul elementelor multimii Y atunci produsul tuturor elementelor multimii M trebuie sa fie patrat perfect.

…….1p

Dar $2014 \cdot 2015 \cdot \dots \cdot 2113$ este divizibil cu 2113 si nu este divizibil cu 2113^2 deci nu este patrat perfect(se arata ca 2113 e prim)……..1p

Deci nu exista doua multimi cu proprietatea din enunt.

Subiectul IV

Se considera 100 puncte pe un cerc. In fiecare punct se inscrie aleator cate un numar natural de la 1 la 100. Este posibil ca suma oricaror patru numere inscrise in patru puncte consecutive sa fie mai mica decat 203?

Barem:

Notam $a_1, a_2, \dots a_{100}$ numerele corespunzatoare celor 100 de puncte de pe cerc.

Presupunem ca suma oricaror patru nr. inscrise in patru puncte consecutive este mai mica decat 203.

$a_1+a_2+a_3+a_4 \leq 202$, $a_2+a_3+a_4+a_5 \leq 202$, $a_3+a_4+a_5+a_6 \leq 202$,…. $a_{97}+a_{98}+a_{99}+a_{100} \leq 202$,

$a_{98}+a_{99}+a_{100}+a_1 \leq 202$, $a_{99}+a_{100}+a_1+a_2 \leq 202$, $a_{100}+a_1+a_2+a_3 \leq 202$. Adunand cele 100 relatii obtinem $4(a_1+a_2+a_3\dots+a_{100}) \leq 20200$, de unde $a_1+a_2+a_3\dots+a_{100} \leq 5050$.

……2p

Str. Lacului, nr.19, Slobozia, Ialomița
Tel: 0243/231.825; 0372.705.073; Fax: 0243.231.825
E-mail: secretariat@isjialomita.ro

Dar $a_1+a_2+a_3\ldots+a_{100}=1+2+3+\ldots+100=5050$. Egalitatea se obtine numai daca in toate cele 100 relatii scrise anterior avem egalitate. ……..3p

Deci , de exemplu : $a_1+a_2+a_3+a_4=202$, $a_2+a_3+a_4+a_5=202$ de unde rezulta $a_1=a_5$. Dar $a_1, a_2, \ldots a_{100}$ sunt distincte de unde rezulta contradictia. Presupunerea facuta este falsa. ……...2p

Conluzia:nu este posibil ca suma oricaror patru numere inscrise in patru puncte consecutive sa fie mai mica decat 203.

OLIMPIADA DE MATEMATICÃ
ETAPA LOCALÃ
22 februarie 2014

CLASA a VI-a

Bareme de corectare

Subiectul I

Notăm d = (a,b); atunci există numerele naturale nenule p şi q astfel încât a = pd, b = qd şi (p,q) = 1. 1 p

Se obţine [a,b] = pqd şi proprietăţile din ipoteză devin:

pd + qd = 2014 şi pqd = 682d ⇒ pq = 682 şi (p + q) divide 2014, 2014 = 2·19·53. 1 p

Dar 682 = 2·11·31 = pq, (p,q) = 1. 1 p

Dacă p = 2 ⇒ q = 341 ⇒ p + q = 343 = 7^3, nu divide 2014.

Dacă p = 11 ⇒ q = 62 ⇒ p + q = 73, nu divide 2014.

Dacă p = 31 ⇒ q = 22 ⇒ p + q = 53, care divide 2014. 2 p

Str. Lacului, nr.19, Slobozia, Ialomiţa
Tel: 0243/231.825; 0372.705.073; Fax: 0243.231.825
E-mail: secretariat@isjialomita.ro

Cum celelalte cazuri posibile revin tot la acestea, schimbând a cu b, singura situaţie convenabilă este p = 31, q = 22, de unde d = 2014:(p+q)=2014:53 = 38. 1 p

Se obţine a = 31·38 = 1178 şi b = 22·38 = 836. 1 p

Subiectul II

$2a + 6b - 5m = 0 \Leftrightarrow 2a + b = 5(m - b)$ se divide cu 5 1p

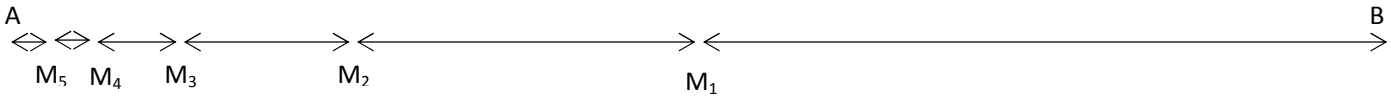
$\Rightarrow 2a(2a + b) = 4a^2 + 2ab$ se divide cu 5

$b(2a + b) = 2ab + b^2$ se divide cu 5 $\Rightarrow (4a^2 + 2ab) - (2ab + b^2) = 4a^2 - b^2$ se divide cu 5;

cum $5b^2$ se divide cu $5 \Rightarrow 4a^2 - b^2 + 5b^2 = 4(a^2 + b^2)$ se divide cu 5. 5p

Dar (4,5) = 1, de unde $a^2 + b^2$ se divide cu 5. 1p

Subiectul III



a) AB = 1m = 1000mm

$A M_1 = AB : 2 = 500mm$

$A M_2 = A M_1 : 2 = AB : 2^2 = 250mm$, $A M_3 = A M_2 : 2 = AB : 2^3 = 125mm$

$A M_4 = A M_3 : 2 = AB : 2^4 = 62,5mm$, $A M_5 = A M_4 : 2 = AB : 2^5 = 31,25mm$

$M_5M_4 = A M_5 = 31,25mm$ 2p

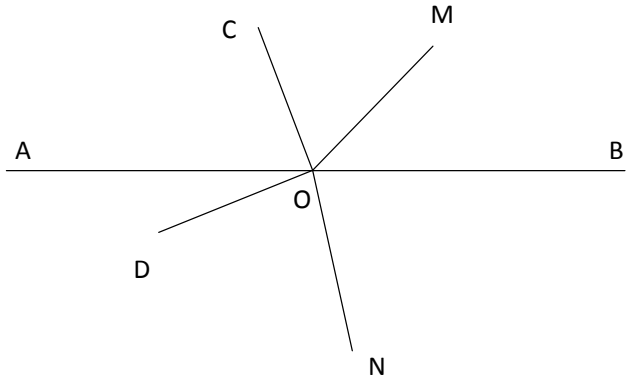
b) Se observă că $AM_n = AB : 2^n$ 2p

$\Rightarrow AM_n < 1mm \Leftrightarrow 2^n > AB$, $AB = 1000mm$ 1p

$2^{10} = 1024$

$2^9 = 512$ $\Rightarrow n = 10$ este cea mai mică valoare. 2p

Subiectul IV



$m(\widehat{AOC}) = 4m(\widehat{AOD})$

$m(\widehat{COD}) = 90^0$ $\Rightarrow m(\widehat{AOD}) = 90^0 : 5 = 18^0, m(\widehat{AOC}) = 4m(\widehat{AOD}) = 72^0$ 3p

$m(\widehat{BOC}) = 180^0 - m(\widehat{AOC}) = 108^0 \Rightarrow m(\widehat{COM}) = 54^0 \Rightarrow m(\widehat{DOM}) = 90^0 + 54^0 = 144^0$

2p

$m(\widehat{BOD}) = 180^0 - m(\widehat{AOD}) = 162^0 \Rightarrow m(\widehat{BON}) = 81^0 \Rightarrow m(\widehat{MON}) = 54^0 + 81^0 = 135^0$

2p

OLIMPIADA DE MATEMATICÃ
ETAPA LOCALÃ
22 februarie 2014

CLASA a VII-a

Bareme de corectare

Subiectul I

Se consideră numerele reale:

$$x=\sqrt{2}+\sqrt{2^2}+\sqrt{2^3}+....+\sqrt{2^{2014}} \quad \text{si}$$
$$y=2+2^2+2^3+....+2^{2014}$$

c) Să se arate că $x=\left(2+\sqrt{2}\right)\left(2^{1007}-1\right)$

d) Să se arate că numărul $n=2\left(\frac{y}{x}\cdot\frac{\sqrt{2}+1}{\sqrt{2}}-1\right)$ este pătrat perfect.

Rezolvare

a) $x=\sqrt{2}+\sqrt{2^2}+\sqrt{2^3}+....+\sqrt{2^{2014}}$

$\sqrt{2}x=\sqrt{2^2}+\sqrt{2^3}+....+\sqrt{2^{2014}}+\sqrt{2^{2015}}$

$\left(\sqrt{2}-1\right)x=\sqrt{2^{2015}}-\sqrt{2}\Rightarrow x=\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2}-1}\left(\sqrt{2^{2014}}-1\right)\Rightarrow x=\left(2+\sqrt{2}\right)\left(2^{1007}-1\right)$ …….3p

b) $y=2\left(2^{2014}-1\right)$ ……..1p

$\frac{y}{x}=\frac{\sqrt{2}\left(2^{1007}+1\right)}{\sqrt{2}+1}\Rightarrow n=2\left(2^{1007}+1-1\right)\Rightarrow n=\left(2^{504}\right)^2$ ……..……3p

Subiectul II

Demonstraţi că nu există $x, y, z\in Z$ astfel încât

$$xy\left(x-y\right)+yz\left(y-z\right)+zx\left(z-x\right)=-1$$

Rezolvare

Pentru orice discutie bazata pe paritatea numerelor……**1p**

Caz I : daca x, y si z au aceeasi paritate atunci x-y, y-z, z-x sunt pare si deci suma este numar

par . Contradictie!.....**2p**

Caz II: daca doua dintre numerele x, y, z sunt pare atunci toti cei trei termeni ai sumei contin cel putin un factor par si deci suma este numar par. Contradictie!.....**2p**

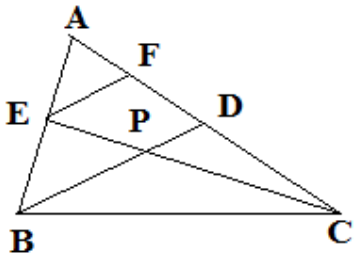
Caz III: daca un singur numar este par atunci celelalte doua sunt impare si diferenta lor este para deci toti termenii sumei sunt pari si intreaga suma este para. Contradictie!.....**2p**

Subiectul III

În triunghiul ABC, D este mijlocul segmentului (AC) iar (CE este bisectoarea interioară a unghiului $\sphericalangle BCA$, $E \in (AB)$. Dacă $BD \cap CE = \{P\}$, să se arate că

$$\frac{PC}{PE} - 2 \cdot \frac{PD}{PB} = 1$$

Rezolvare



$\triangle BCD \overset{teorema.bisectoarei}{\Rightarrow} \frac{PD}{PB} = \frac{CD}{CB} \Rightarrow 2 \cdot \frac{PD}{PB} = 2 \cdot \frac{CD}{CB} = \frac{AC}{BC} \Rightarrow 1 + 2 \cdot \frac{PD}{PB} = 1 + \frac{AC}{BC}$ **2p**

Construim $EF \| BD, F \in AC$

$\triangle CEF, EF \| PD \overset{teorema.Thales}{\Rightarrow} \frac{PC}{PE} = \frac{DC}{DF}$

$AD = DC \Rightarrow \frac{PC}{PE} = \frac{AD}{DF}$ **1p**

$\triangle ABD \overset{t.Thales}{\Rightarrow} \frac{AD}{DF} = \frac{AB}{EB}$ **1p**

$\triangle ABC \overset{t.bisectoarei}{\Rightarrow} \frac{AE}{EB} = \frac{AC}{BC} \Rightarrow \frac{AE+EB}{EB} = \frac{AC+BC}{BC} \Rightarrow \frac{AB}{EB} = \frac{AC}{BC} + 1$ **2p**

Finalizare : $1+2\cdot\frac{PD}{PB}=1+\frac{AC}{BC}=\frac{AB}{EB}=\frac{AD}{DF}=\frac{PC}{PE}$ ……**1p**

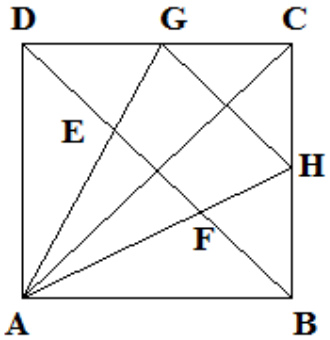
Subiectul IV

Se consideră pătratul ABCD în care punctele G şi H sunt mijloacele laturilor DC şi respectiv BC. Dreptele AG şi AH intersectează diagonala BD în punctele E respectiv F.

c) Arătaţi că patrulaterul EFHG este trapez isoscel.

d) Determinaţi raportul dintre aria trapezului EFHG şi aria pătratului ABCD.

Rezolvare



a) GH linie mijlocie in $\triangle BCD \Rightarrow GH \parallel DB \Rightarrow GH \parallel EF$ ……..1p

$\triangle AHB \equiv \triangle AGD \Rightarrow AH = AG \Rightarrow \triangle AHG$ este isoscel $\Rightarrow \sphericalangle AHG \equiv \sphericalangle AGH$ ……..1p

$\Rightarrow EFHG$ trapez isoscel

b) Fie $AC \cap BD = \{O\}$

$OC \cap GH = \{P\}$

Notez lungimea segmentului OC cu ***a***

$CO \perp BD, GH \parallel BD \Rightarrow CO \perp GH \Rightarrow$ OP este inaltimea trapezului

GH linie mijlocie in $\triangle BCD \Rightarrow P$ este mijlocul segmentului OC $\Rightarrow$ OP $= \frac{a}{2}$ ……1p

$GH = \frac{DB}{2} \Rightarrow GH = a$

$\triangle ADC$, $AG, DO - mediane \Rightarrow$ E = centrul de greutate $\Rightarrow$ EO= $\frac{a}{3} \Rightarrow EF = \frac{2a}{3}$ ……2p

$A_{EFHG} = \frac{\left(a+\frac{2a}{3}\right)\frac{a}{2}}{2} \Rightarrow A_{EFHG} = \frac{5a^2}{12}$, $A_{ABCD} = 4 \cdot A_{AOB} = 4 \cdot \frac{a^2}{2} = 2a^2$

Str. Lacului, nr.19, Slobozia, Ialomița
Tel: 0243/231.825; 0372.705.073; Fax: 0243.231.825
E-mail: secretariat@isjialomita.ro

$\frac{A_{EFHG}}{A_{ABCD}} = \frac{5}{24}$ ……..2p

OLIMPIADA DE MATEMATICÃ
ETAPA LOCALÃ
22 februarie 2014

CLASA a VIII-a

Bareme de corectare

SUBIECTUL I

(3p) **a)** Se consideră numărul $A = n^2 - n - 12, \quad n \in \boldsymbol{N}$. Să se arate că, dacă A este divizibil cu 7, atunci A este divizibil cu 98.

(4p) **b)** Să se arate că numărul $B = n^2 + 10n - 3$ nu este divizibil cu 196, pentru orice valoare naturală a numărului n.

Soluţie

a) $A = (n+3)(n-4)$, **(1p);** $7/(n+3) \Leftrightarrow 7/(n-4)$ şi $2/(n+3)(n-4), (\forall) n \in N$ **(1p);** finalizare **(1p)**.

b) $B = (n+5)^2 - 28,$ **(1p);** Presupunem $196/B \Rightarrow B = 196k, \quad k \in N$. Deci $(n+5)^2 - 28 = 196k \Leftrightarrow (n+5)^2 = 28(7k+1)$, **(1p);**

$7/(n+5)$ şi avem $(7p)^2 = 28(7k+1) \Leftrightarrow 7p^2 = 4(7k+1), \ p \in N$ **(1p).** Finalizare **(1p)**

SUBIECTUL II

(1p) **a)** Stabiliţi dacă $\frac{1}{\sqrt{2014}} < \frac{2}{\sqrt{2014}+\sqrt{2013}} < \frac{1}{\sqrt{2013}}$.

(3p) **b)** Arătaţi că $\frac{1}{\sqrt{n+1}} < 2\sqrt{n+1} - 2\sqrt{n} < \frac{1}{\sqrt{n}}$, pentru orice valoare naturală nenulă a numărului n.

(3p) **c)** Demonstraţi că $\frac{1}{\sqrt{100}} + \frac{1}{\sqrt{101}} + ... + \frac{1}{\sqrt{120}} > \frac{1}{\sqrt{145}} + \frac{1}{\sqrt{146}} + ... + \frac{1}{\sqrt{169}}$.

Str. Lacului, nr.19, Slobozia, Ialomița
Tel: 0243/231.825; 0372.705.073; Fax: 0243.231.825
E-mail: secretariat@isjialomita.ro

Soluţie

a) Avem

$\frac{2}{2\sqrt{2014}} < \frac{2}{\sqrt{2014}+\sqrt{2013}} < \frac{2}{2\sqrt{2013}} \Leftrightarrow \sqrt{2014}+\sqrt{2014} > \sqrt{2014}+\sqrt{2013} > \sqrt{2013}+\sqrt{2013}$.**(1p)**

b) Avem $\frac{1}{\sqrt{n+1}} < \frac{2}{\sqrt{n+1}+\sqrt{n}} < \frac{1}{\sqrt{n}}$ **(1p);** $\frac{2}{2\sqrt{n+1}} < \frac{2}{\sqrt{n+1}+\sqrt{n}} < \frac{2}{2\sqrt{n}}$ **(1p)**

$\sqrt{n+1}+\sqrt{n+1} > \sqrt{n+1}+\sqrt{n} > \sqrt{n}+\sqrt{n}$, finalizare **(1p)**

c) Fie $x = \frac{1}{\sqrt{100}} + \frac{1}{\sqrt{101}} + ... + \frac{1}{\sqrt{120}} > 2\left(\sqrt{101}-\sqrt{100}\right)+2\left(\sqrt{102}-\sqrt{101}\right)+...+2\left(\sqrt{121}-\sqrt{120}\right) = 2$,

(1p) şi

$y = \frac{1}{\sqrt{145}} + \frac{1}{\sqrt{146}} + ... + \frac{1}{\sqrt{169}} < 2\left(\sqrt{145}-\sqrt{144}\right)+2\left(\sqrt{146}-\sqrt{145}\right)+...+2\left(\sqrt{169}-\sqrt{168}\right) = 2$, **(1p).**

Finalizare **(1p)**

SUBIECTUL III

Se consideră cubul $ABCDA'B'C'D'$. Punctele P, Q şi R sunt proiecţiile punctului A pe dreptele $A'D$, $A'B$ şi respectiv $A'C$.

(4p) **a)** Să se arate că dreapta $A'C$ este perpendiculară pe planul (PQR);

(3p) **b)** Să se calculeze aria triunghiului PQR, pentru $AB = a \ \ cm, \ \ a > 0.$

Soluţie

a) $AP \perp A'D, \ \ AP \perp DC \Rightarrow AP \perp (A'DC)$ **(1p)**

$AP \perp A'C, \ \ AR \perp A'C \Rightarrow A'C \perp (APR) \Rightarrow A'C \perp PR$ **(1p)**

Analog $A'C \perp (ARQ) \Rightarrow A'C \perp QR$ sau $PQ \,//\, BD$ şi $BD \perp A'C \Rightarrow PQ \perp A'C$ **(1p)**

Finalizare **(1p)**

Str. Lacului, nr.19, Slobozia, Ialomița
Tel: 0243/231.825; 0372.705.073; Fax: 0243.231.825
E-mail: secretariat@isjialomita.ro

b) $PQ=\frac{a\sqrt{2}}{2},(\Delta A'BD)$ **(1p)**

$RQ=\frac{a\sqrt{6}}{6},(\Delta A'BC)$; $RP=\frac{a\sqrt{6}}{6},(\Delta A'DC)$ **(1p)**

$A_{\Delta PQR}=\frac{a^2\sqrt{3}}{24}$ **(1p)**

SUBIECTUL I V

Fie A, B, C şi D patru puncte necoplanare aşa încât $AB=6cm,\ AC=AD=6\sqrt{2}\ cm$ şi $m\angle(DAB)=m\angle(BAC)=m\angle(CAD)=90^0$.

(2p) **a)** Să se calculeze aria triunghiului BCD;

(5p) **b)** Să se afle lungimea segmentului AE, unde E este proiecţia punctului A pe planul (BCD).

Soluţie

a) $BC=BD=6\sqrt{3},\ CD=12$ **(1p)**

$A_{\Delta BCD}=36\sqrt{2}$ **(1p)**

b) Demonstrează că punctul E este ortocentrul triunghiului BCD. **(2p)**

Fie $BM\perp CD,\ DN\perp BC,\ M\in CD,\ N\in BC$, avem:

$BM=6\sqrt{2},\ DN=4\sqrt{6},\ BN=2\sqrt{3}$ **(1p)**

$\Delta BNE\sim\Delta BMC$, $BE=3\sqrt{2}$ **(1p).** Finalizare $AE=3\sqrt{2}$, **(1p)**